Mircea FIANU • Marius PERIANU • Ioan BALICA
Dumitru SĂVULESCU

Matematică

clasa a VIII-a

II

CLUBUL MATEMATICIENILOR

Cuprins

Cap. 5 – Subiecte pentru evalurările finale

CAPITOLUL 1
Funcţii

CAPITOLUL 1

Funcții

1.1. Noțiunea de funcție

Definiție. Fie A și B două mulțimi nevide. Prin *funcție f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B* se înțelege orice lege (regulă, procedeu, convenție) prin care fiecărui element $x \in A$ i se asociază un singur element $y = f(x) \in B$.

Prin $f : A \to B$ vom nota o funcție definită pe A cu valori în B. Mulțimea A se numește *domeniul de definiție* al funcției f, mulțimea B se numește *domeniul de valori* sau *codomeniul* funcției f, iar procedeul (regula) $y = f(x)$ se numește *legea de corespondență* a funcției f. Dacă $x \in A$, elementul $f(x) \in B$ se numește *imaginea* lui x prin funcția f sau *valoarea funcției f* în punctul x.

Imaginea funcției. Fie $f : A \to B$ o funcție. *Imaginea* (sau mulțimea valorilor) funcției f este mulțimea: $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in A\}$. În mod evident, $\operatorname{Im} f \subset B$.

Putem scrie și astfel: $\operatorname{Im} f = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ a.î. } y = f(x)\}$.

Graficul funcției. Fie $f : A \to B$ o funcție. Mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ se numește *graficul funcției f*. Avem și $G_f = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x)\} \subset A \times B$.

Funcția numerică este o funcție al cărei domeniu de definiție și domeniu de valori ale unei funcții sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ (mulțimi de numere).

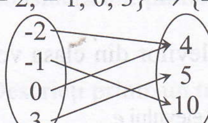
Reprezentarea geometrică a graficului. Dacă $f : A \to B$ este o funcție numerică, fiecărui element $(x, y) \in G_f$ îi putem asocia un punct $M(x, y)$ într-un reper cartezian. Submulțimea planului formată din toate punctele $M(x, y)$, cu $(x, y) \in G_f$ se numește *reprezentarea geometrică* a graficului funcției f.

Funcții egale. Două funcții $f : A \to B$ și $g : C \to D$ sunt *egale* dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$. Notăm: $f = g$.

Moduri de definire a unei funcții. Funcțiile pot fi descrise în diverse moduri:

1. Printr-o ***diagramă***.

$f : \{-2; -1; 0; 3\} \to \{4; 5; 10\}$,



2. Printr-un ***tabel***.

$g : \{-1; 0; 2; 5\} \to \{1; 2; 3\}$.

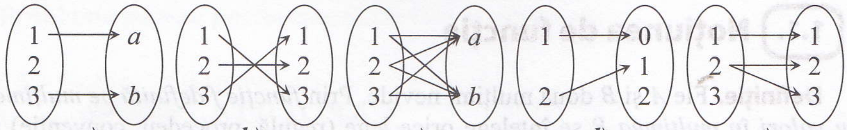
x	-1	0	2	5
$f(x)$	1	2	3	1

3. Prin una sau mai multe formule analitice:

$h : \{0,2,4\} \to \{0,4,16\}$, $h(x) = x^2$; $\quad u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{dacă } x \le 1 \\ 2x + 3, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$.

*

1. Precizați care dintre următoarele diagrame definesc funcții:



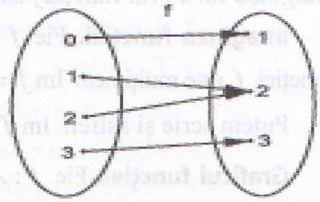
a) *b)* *c)* *d)* *e)*

2. Explicați de ce tabelul alăturat **nu** descrie o funcție.

x	-1	0	1	2	1
$f(x)$	0	3	4	5	6

3. Precizați dacă scrierea $f:\{-1;0;1;2\}\to\{0;1;2;3;4\}$, $f(x)=x+1$, reprezintă o funcție.

4. În imaginea alăturată este descrisă funcția $f:A\to B$.



a) Precizați elementele mulțimilor A și B.

b) Scrieți elementele mulțimii $\operatorname{Im} f$.

c) Scrieți elementele mulțimii G_f.

5. Tabloul alăturat descrie o funcție $f:A\to B$.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	0	4	8	12

a) Determinați mulțimea A.

b) Scrieți mulțimea $\operatorname{Im} f$.

c) Descrieți corespondența $x\to f(x)$ printr-o formulă.

6. Explicați dacă mulțimea indicată reprezintă graficul unei funcții definite pe mulțimea $\{-2;-1;0;1;2\}$ cu valori în $\mathbb{R}$. În caz afirmativ, descrieți funcția printr-o diagramă.

a) $G_f=\{(-2;0);(-1;0);(0;1);(1;1);(2;2)\}$;

b) $G_g=\{(-2;-1);(-2;0);(-1;-1);(0;-1);(1;2)\}$;

c) $G_h=\{(-2;1);(-1;-1);(0;-1);(1;1);(1;2);(2;1)\}$.

7. *a)* Descrieți trei funcții definite pe mulțimea E a elevilor din clasa voastră cu valori în mulțimea $S=\{f;b\}$.

b) Descrieți trei funcții definite pe mulțimea E a elevilor din clasa voastră cu valori în mulțimea $\mathbb{N}$.

Indicație: $f:E\to\mathbb{N}$, $f(e)=$ numărul curent din catalog al elevului e.

8. Descrieți trei funcții definite pe mulțimea $N=\{23;157;4;2000;145\}$ cu valori în mulțimea $C=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$;

Indicație: Ultima cifră a numărului 23 este 3. Definim $u(23)=3$.

9. Descrieți trei funcții s definită pe mulțimea $N=\{157;59;1002;8\}$ cu valori în mulțimea $S=\{3;4;8;9;13;14\}$.

Indicație: Suma cifrelor numărului 157 este egală cu 13. Definim $s(157)=13$.

10. Descrieți, în mod natural, o funcție f definită pe mulțimea $F=\left\{\frac{15}{24};\frac{34}{51};\frac{108}{56};\frac{225}{125}\right\}$ cu valori în mulțimea $I=\left\{\frac{9}{5};\frac{2}{3};\frac{5}{8};\frac{27}{14}\right\}$.

Indicație: $\frac{15^{(3}}{24}=\frac{5}{8}$.

11. Stabiliți pentru care din următoarele funcții are loc relația $-2\in \operatorname{Im} f$:

a) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-11$; ***b)*** $f:\{-2,-1,0,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+3$.

c) $f:[-3,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=4x-3$; ***d)*** $f:\left(-\frac{5}{4},+\infty\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=4x+3$.

Indicație: ***a)*** Dacă $-2\in \operatorname{Im} f$, atunci există $x\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(x)=-2$, adică $x^2-11=-2$, de unde $x=3$. Așadar, deoarece $f(3)=-2$, rezultă $-2\in \operatorname{Im} f$.

**

12. Fie mulțimile $R=\left\{3,14;\frac{7}{3};4;-1;-2\frac{1}{10};\sqrt{10}\right\}$ și $I=\{-3;-1;1;2;3;4\}$.

a) Descrieți prin tabel și precizați imaginea funcției $i:R\to I,\ i(x)=[x]$.

b) Scrieți elementele mulțimii G_i.

13. Fie mulțimile $R=\left\{7,2;3\frac{1}{2};5;-1,4;-\frac{1}{3}\right\}$ și $F=\{0;\ 0,2;\ 0,5;\ 0,6;\ 0,(6)\}$.

a) Descrieți prin tabel și precizați imaginea funcției $z:R\to F,\ z(x)=\{x\}$.

b) Scrieți elementele mulțimii G_z.

14. Se consideră mulțimile $M=\{28;55;27;39\}$ și $N=\{9;17;13;4;5\}$. Verificați dacă asocierea: "oricare $x\in M$, $x\to y=f(x)\in N$, unde $f(x)$ este divizor al lui x", reprezintă o funcție definită pe mulțimea M cu valori în mulțimea N.

15. Se consideră mulțimile $A=\left\{-2;\frac{7}{5};-\pi;0;\sqrt{3}\right\}$ și $S=\{-1;0;1\}$.

a) Descrieți printr-un tabel funcția $\sigma:A\to S$, $\sigma(x)=\begin{cases}-1, \text{ pentru } x<0\\ 0, \text{pentru } x=0\\ 1, \text{ pentru } x>0\end{cases}$.

b) Precizați imaginea funcției σ și scrieți elementele mulțimii G_σ.

16. Se consideră mulțimile $A=\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ și $M=\{0;1;2;3;4\}$.

a) Descrieți prin tabel și precizați imaginea funcției $m:A\to M$, $m(x)=|x|$.

b) Scrieți elementele mulțimii G_m.

c) Reprezentați geometric mulțimea G_m.

17. Se consideră mulțimea $A=\left\{0;1;\frac{4}{9};1\frac{9}{25};10{,}24;11\right\}$ și funcția $r:A\to\mathbb{R}$, $r(x)=\sqrt{x}$.

a) Scrieți elementele mulțimii $\operatorname{Im} r$ și efectuați $\mathbb{Q}\cap\operatorname{Im} r$.

b) Descrieți printr-o formulă o funcție $p:\operatorname{Im} r\to A$.

18. Se consideră mulțimea $U=\{30°,45°,60°\}$. Determinați imaginile funcțiilor:

a) $s:U\to\mathbb{R}$, $s(x)=\sin x$; *b)* $t:U\to\mathbb{R}$, $t(x)=\operatorname{tg} x$.

19. Fie $I=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a\in\mathbb{N}^*, b\in\mathbb{N}^*, (a;b)=1\right\}$ și funcția $f:I\to\mathbb{N}$, $f\left(\frac{x}{y}\right)=x+y$.

a) Determinați imaginea mulțimii $A=\left\{\frac{1}{9};\frac{99}{1};\frac{153}{152}\right\}$.

b) Arătați că, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}, n>1$, există $t\in I$ astfel încât $f(t)=n$.

20. Se consideră funcția $s:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $s(x;y)=x+y$. Calculați:

a) $s(0;-3)$; *b)* $s(3;-3)$; *c)* $s(-8;-7)$;

d) $s\left(0{,}5;\frac{-3}{2}\right)$; *e)* $s\left(1-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}\right)$; *f)* $s\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

21. Se consideră funcția $p:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p(x;y)=x\cdot y$. Calculați:

a) $p(7;-1)$; *b)* $p(-2;-2)$; *c)* $p\left(1\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$;

d) $p\left(\sqrt{7};-\sqrt{28}\right)$; *e)* $p\left(\sqrt{2}-\sqrt{3};\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; *f)* $p\left(2\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$.

22. Arătați că următoarele funcții sunt egale:

a) $f,g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}$ și $g(x)=(x-|x|)(x+|x|)$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a;

b) $f,g:(-1,0)\cup(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]$ și $g(x)=\frac{|x|-x}{2x}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a;

c) $f,g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|1-x|+|1+x|$ și $g(x)=\max(2,x+1)$;

d) $f,g:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|2-x|-|2+x|$ și $g(x)=\min(-2x,4)$.

e) $f,g:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\min(x,x^2)$ și $g(x)=\max(x^2,x^3)$.

f) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2|x|$ și $g(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\sqrt{\left(x^2+1\right)^2}$;

23. Fie funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=$ ultima cifră a numărului natural x.

a) Determinați $\mathrm{Im}\, f$.

b) Calculați suma $S = f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(105)$.

24. Fie funcția $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) =$ ultima cifră a numărului natural 2^n.

a) Determinați $\mathrm{Im}\, f$.

b) Calculați suma $S = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(2012)$.

25. *a)* Descrieți trei funcții definite pe mulțimea T a triunghiurilor din planul α cu valori în mulțimea C a cercurilor din planul α.

b) Descrieți trei funcții definite pe mulțimea triunghiurilor T din planul α cu valori în mulțimea P a punctelor din planul α.

c) Fie A un punct dat în planul α. Se consideră mulțimea C_A a cercurilor din planul α care conțin punctul A și mulțimea T a triunghiurilor din planul α. Descrieți trei funcții definite pe mulțimea C_A cu valori în mulțimea T.

Exemple: *a)* $o : T \to C$, $o(t) =$ cercul circumscris triunghiului t, oricare ar fi $t \in T$.

b) $h : T \to P$, $h(t) =$ ortocentrul triunghiului t, oricare ar fi $t \in T$.

c) $e : C_A \to T$, unde $e(c) =$ triunghiul echilateral AXY înscris în cercul c.

***

26. *a)* Descrieți prin diagrame toate funcțiile care pot fi definite pe mulțimea $A = \{a; b; c\}$ cu valori în mulțimea $B = \{0; 1\}$.

b) Descrieți prin diagrame toate funcțiile care pot fi definite pe mulțimea $A = \{a; b\}$ cu valori în mulțimea $B = \{-1; 0; 1\}$.

27. *a)* Se consideră mulțimile $A = \{0; 1; 2; ...; 12\}$ și $B = \{-1; 0; 1\}$. Determinați numărul de funcții ce pot fi definite pe mulțimea A cu valori în mulțimea B.

b) Arătați că, dacă mulțimea A are n elemente, $n \geq 1$, iar mulțimea B are m elemente, $m \geq 1$, atunci numărul de funcții care se pot defini pe mulțimea A cu valori în mulțimea B este egal cu m^n.

c) Se consideră mulțimile finite și nevide A și B. Dacă numărul de funcții care pot fi definite pe mulțimea A cu valori în mulțimea B este 4^5, determinați $\mathrm{card}\, A$ și $\mathrm{card}\, B$. Analizați variantele posibile.

28. Pentru fiecare funcție $f : \{0; 1; 2; ...; 12\} \to \{-1; 0; 1\}$, notăm :

$$S_f = f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(12).$$

a) Descrieți o funcție $o : \{0; 1; 2; ...; 12\} \to \{-1; 0; 1\}$ pentru care $S_o = 0$;

b) Descrieți o funcție $m : \{0; 1; 2; ...; 12\} \to \{-1; 0; 1\}$ pentru care S_m are valoarea maximă.

c) Arătați că, dacă o funcție $f : \{0; 1; 2; ...; 12\} \to \{-1; 0; 1\}$ are proprietatea că $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot ... \cdot f(12) \neq 0$, atunci $S_f \neq 0$.

29. Determinați imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-1)^{[x]}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

30. Dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică relația $f(2x+1)=-2x+5$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, determinați valoarea numărului $f(2011)$.

31. Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ verifică relația $f(x^2)=2x+5$, pentru orice $x>0$. Determinați valoarea numărului $f(1)+f(2)+f(4)+f(8)$.

32. Stabiliți care dintre următoarele funcții sunt egale:

a) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ și $g(x)=x(x-1)(x-2)+1$;

b) $f,g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$, $f(n)=u(4^n)$ și $g(n)=5+(-1)^n$, unde $u(a)$ reprezintă ultima cifră a numărului natural a.

c) $f,g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$, $f(n)=u(9^n)$ și $g(n)=5+4\cdot(-1)^{n+1}$, unde $u(a)$ reprezintă ultima cifră a numărului natural a.

d) $f,g\ \mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$, $f(n)=u(6^n)-u(5^n)$ și $g(n)=1$, unde $u(a)$ reprezintă ultima cifră a numărului natural a.

33. Determinați numerele *a*, *b*, *c*, *d*, pentru care funcțiile *f* și *g* să fie egale, unde:

a) $f:[-3;a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3c-2)x-5$,

$g:[b;11]\to\mathbb{R}, g(x)=7x+d-4$;

b) $f:[2a-5;13]\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-4c-17$,

$g:[3;2b+1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=dx-1$;

c) $f:[a-1,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=bx-1$,

$g:[c-3,2a+1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+d-5$.

34. Demonstrați că, pentru orice funcție $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=ax+b$, unde $a,b\in\mathbb{Z}$, este adevărată relația $a-b\mid f(a)-f(b)$.

35. Funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ are proprietățile:

a) $f(0)=1$;

b) $f(f(n))=f(n)+1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Determinați $f(2011)$.

E TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Enumerați cele trei elemente ale unei funcții.

2. Determinați elementele mulțimilor A și B știind că: $A \times B = \{(0, 1); (0, 5); (2, 1); (2, 5); (3, 1); (3, 5)\}$.

3. Fie $f : \{1, 2, 3\} \to \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $f(1) = 0$, $f(2) = 4$ și $f(3) = a$. Ce valori poate lua a pentru ca f să fie o funcție?

4. Pentru ce valori $m \in \mathbb{R}$ punctul $M(m, 11)$ nu aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 12x + 8$?

5. Determinați numerele a, b, c, d pentru care sunt egale funcțiile $f : [1, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = cx + 8$ și $g : [b, 10] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 6x + 9 - d$.

6. Reprezentați grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$.

7. Graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trece prin punctele $A(0, -2)$ și $B(3, 0)$. Reprezentați punctele în plan și trasați graficul funcției f.

8. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Calculați suma:

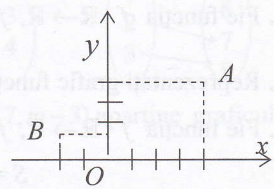
$$S = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(100).$$

9. Fie funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x - 20}{5}$. Determinați punctele de pe grafic care au coordonatele egale.

NOTĂ: Timp de lucru 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Testul 2

1. Din reperul ortogonal de axe xOy alăturat, Scrieți coordonatele punctelor A și B.



2. Explicați de ce prin tabelul alăturat nu este dat un exemplu de funcție.

x	-1	0	1	2	1
$f(x)$	0	1	2	3	4

3. Aflați numărul real m pentru care punctul $A(m, 5)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$.

4. Reprezentați grafic funcția $f : [-2, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

5. Determinați coordonatele punctului de intersecție al graficelor funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 9x + 13$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -7x + 45$.